Оглавление

Предисловие

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются математические модели принятия решений в условиях конфликта, т. е. в условиях столкновения сторон, каждая из которых стремится воздействовать на развитие конфликта в своих собственных интересах. Теорию математических моделей принятия оптимальных решений принято называть исследованием операций, поэтому теорию игр следует рассматривать как прикладную математическую теорию — составную часть исследования операций.

Несмотря на наличие богатой монографической и специальной литературы по теории игр, учебников, покрывающих этот раздел математики, сравнительно немного и в них рассматриваются в основном отдельные разделы теории игр. Настоящий учебник восполняет этот пробел и является существенным развитием книги Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. «Теория игр», М.: Высшая школа, Книжный дом «Университет», 1998, в которой впервые в отечественной литературе было дано систематическое изложение единой теории статических и динамических игр. В новой книге изложение динамических игр распространено на случай кооперативных дифференциальных игр, существенно расширены разделы, касающиеся статической теории кооперативных решений и динамических кооперативных игр, а также игр с неполной информацией. Уточнены и изменены доказательства отдельных утверждений. Здесь впервые в отечественной учебной литературе используется единый подход к исследованию оптимального поведения игроков в позиционных играх, основанный на концепции динамической устойчивости (состоятельности во времени) решений неантагонистических игр, а также свойствах сильной динамической устойчивости, динамической совместимости, согласованности и других динамических характеристиках состоятельности различных оптимальных решений. На базе изложенного подхода приведено систематическое изложение бескоалиционных, коалиционных и кооперативных принципов оптимальности в различных классах позиционных игр.

В учебнике отражено большинство актуальных направлений современной теории игр. Он методически построен так, что понятие модели конфликта (игры) развивается от простой (матричные игры) до наиболее сложной (дифференциальные игры). Большинство университетских учебных программ предполагает чтение отдельных разделов или специальных курсов по теории игр. Данный учебник построен таким образом, чтобы каждая глава могла служить основой такого курса. Для предварительного ознакомления с теорией игр достаточно изучить материал гл. 1. Типовой курс по теории игр может быть построен на основе гл. 1, 3 и 4. В учебнике полно изложены теории антагонистических игр (гл. 1, 2, 4, 5), неантагонистических игр (гл. 3, 4, 6) и кооперативных игр (3, 4, 7, 8). В учебных дисциплинах «Системный анализ» и «Модели принятия решений» целесообразно использовать гл. 3 и 4. При построении курса лекций полезно также воспользоваться приведенным списком специальной литературы.

Во всех главах приводятся многочисленные примеры, иллюстрирующие основные положения теории. Некоторые из них представляют самостоятельный интерес. В конце каждой главы приведены упражнения для индивидуальной работы, расположенные в порядке изложения материала и возрастания сложности. В ряде случаев они существенно дополняют содержание главы. Систематическое решение этих упражнений является важной формой изучения теории игр. Для усвоения основных понятий и результатов, приведенных в учебнике, достаточно знания курса математики в объеме университетской программы. Наиболее сложными в математическом отношении являются главы 2 и 5, которые предназначены для студентов математических специальностей.

В списке рекомендованной литературы приведены основная (основные учебники и задачники), дополнительная (монографии и учебные пособия) и специальная (статьи, справочники, обзоры, сборники статей) литература. В список дополнительной литературы включены также статьи, которые цитируются в основном тексте. Вместе с тем библиография не претендует на полноту.

Учебник может быть использован как для первоначального, так и для углубленного изучения теории игр. Он предназначен для студентов и аспирантов, обучающихся по направлению «Прикладная математика и информатика» и специализирующихся в области исследования операций, системного анализа, методов оптимизации, математической кибернетики, математического моделирования, будет также полезен студентам и аспирантам экономических, управленческих и технических направлений, изучающим математические методы принятия решений в сложных системах управления. Книга заинтересует специалистов, развивающих теорию игр, исследование операций, теорию управления, математическую экономику, теорию менеджмента и их приложения.

Учебник написан на основе курсов «Теория игр и исследование операций», «Системный анализ», «Математические модели принятия решений в экономике и управлении», «Исследование систем управления», а также ряда специальных курсов по разделам и приложениям теории игр, прочитанных Л. А. Петросяном, Н. А. Зенкевичем и Е. В. Шевкопляс студентам старших курсов и аспирантам на факультете прикладной математики — процессов управления (ПМ-ПУ) и в Высшей школе менеджмента Санкт-Петербургского государственного университета.

Благодарности. Параграфы 7, 9 гл. 1, § 5, 10 гл. 3, § 4–6, 8 и 9 гл. 4, § 2–6, 8 гл. 5 написаны совместно с Е. А. Семиной, за что авторы выражают Елене Александровне искреннюю признательность.

Мы благодарим Е. М. Парилину, А. А. Седакова, С. Ю. Костюнина и В. А. Клемешева, а также студентов и аспирантов кафедры математической теории игр и статистических решений факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета за помощь при подготовке рукописи.

Выражаем особую благодарность Н. Н. Петрову и Н. И. Наумовой за ценные замечания и предложения.

Авторы

Введение

В.1. Математическая теория игр является составной частью исследования операций. Она находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких, как экономика и менеджмент, промышленность и сельское хозяйство, военное дело и строительство, торговля и транспорт, связь и т. д. В настоящем учебнике изложены основные понятия и результаты теории игр.

В.2. Задачи исследования операций можно классифицировать по уровню информации о ситуации, которой располагает субъект, принимающий решение. Наиболее простыми уровнями информации о ситуации являются детерминированный (когда условия, в которых принимаются решения, известны полностью) и стохастический (когда известно множество возможных вариантов условий и их вероятностное распределение). В этих случаях задача сводится к нахождению экстремума функции (или ее математического ожидания) при заданных ограничениях. Методы решения таких задач изучаются в курсах математического программирования или методов оптимизации.

Наконец, третий уровень — неопределенный, когда известно множество возможных вариантов, но без какой-либо информации об их вероятностях. Такой уровень информации о ситуации является наиболее сложным. Эта сложность оказывается принципиальной, так как могут быть не ясны сами принципы оптимального поведения. Следуя определению Н.Н. Воробьева, теория игр — это теория математических моделей принятия решений в условиях неопределенности, когда принимающий решение субъект («игрок») располагает информацией лишь о множестве возможных ситуаций, в одной из которых он в действительности находится, о множестве решений («стратегий»), которые он может принять, и о количественной мере того «выигрыша», который он мог бы получить, выбрав в данной ситуации данную стратегию. Установление принципов оптимального поведения в условиях неопределенности, доказательство существования решений, удовлетворяющих этим принципам, указание алгоритмов нахождения решений и составляют содержание теории игр.

В.3. Неопределенность, с которой мы встречаемся в теории игр, может иметь различное происхождение. Однако, как правило, она является следствием сознательной деятельности другого лица (лиц), отстаивающего свои интересы. В связи с этим под теорией игр часто понимают теорию математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта. Таким образом, моделями теории игр можно в принципе содержательно описывать весьма разнообразные явления: экономические, правовые и классовые конфликты, взаимодействие человека с природой, биологическую борьбу за существование и т. д. Все такие модели в теории игр принято называть играми.

Математическое описание игры сводится к перечислению всех действующих в ней игроков, указанию для каждого игрока всех его стратегий, а также численного выигрыша, который он получит после того, как игроки выберут свои стратегии. В результате игра становится формальным объектом, который поддается математическому анализу.

В.4. Игры можно классифицировать по различным признакам. Во-первых, бескоалиционные игры, в которых каждая коалиция (множество игроков, действующих совместно) состоит лишь из одного игрока. Так называемая кооперативная теория бескоалиционных игр допускает временные объединения игроков в коалиции в процессе игры с последующим разделением полученного выигрыша или принятия совместных решений. Во-вторых, коалиционные игры, в которых принимающие решения игроки согласно правилам игры объединены в фиксированные коалиции. Члены одной коалиции могут свободно обмениваться информацией и принимать полностью согласованные решения.

По выигрышу игры можно разделить на антагонистические и игры с ненулевой суммой.

По характеру получения информации — на игры в нормальной форме (игроки получают всю предназначенную им информацию до начала игры) и динамические игры (информация поступает игрокам в процессе развития игры).

По количеству стратегий — на конечные и бесконечные игры.

В.5. Учебник состоит из восьми глав. Первая глава содержит основные сведения из теории конечных антагонистических (матричных) игр. Здесь доказывается теорема существования ситуации равновесия в классе смешанных стратегий, выводятся свойства оптимальных смешанных стратегий, приведены методы решения матричных игр. Хотя антагонистический конфликт является очень специальным случаем конфликта, возникающего в конкретных сферах приложений, тем не менее, в первой главе приводятся многочисленные примеры задач поиска и преследования, которые моделируются матричными играми.

Во второй главе рассматриваются бесконечные антагонистические игры или игры с бесконечным числом стратегий у каждого из игроков. Здесь теоремы существования ситуаций равновесия справедливы далеко не во всех случаях. К важным условиям существования относятся свойства функции выигрыша. В главе приводится доказательство существования ситуации равновесия в смешанных стратегиях, когда функция выигрыша является непрерывной. Однако существует достаточно большое число классов игр, для которых это обстоятельство не имеет места, но равновесие, тем не менее, существует. К играм такого типа относятся дуэли и покер. Рассмотрение игр типа покера интересно еще и тем, что позволяет обосновать стратегию «блефа», часто встречающуюся на практике. В главе рассмотрены также приложения к задачам поиска и преследования.

Третья глава посвящена статическим неантагонистическим играм. В качестве принципа оптимальности в таких моделях обычно используется равновесие по Нэшу. Приводится доказательство существования равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях в играх с конечным числом стратегий, исследуются свойства равновесий и приводятся некоторые модификации равновесия по Нэшу. Исследуются и другие принципы оптимальности, такие, как решения оптимальные по Парето и арбитражные схемы. В связи с серьезными приложениями в биологии и экономике, даются определение и свойства эволюционно-устойчивых стратегий. В последнее время возродился интерес к использованию коррелированных действий в неантагонистических играх. В этой связи в главу включен материал о равновесиях в совместных смешанных стратегиях. Вторая половина главы посвящена кооперативной теории игр. Здесь мы ограничиваемся изложением случая, когда выигрыши игроков трансферабельны и игра задается характеристической функцией. Предполагается, что при кооперации игроки максимизируют свой суммарный выигрыш. Поэтому задача заключается в дележе полученного максимального выигрыша, который устраивал бы всех игроков. Исходя из такого понимания кооперации, в главе приводится классическое понятие характеристической функции и основные принципы оптимальности (C-ядро, NM-решение и вектор Шепли). Доказаны теоремы существования непустого ядра. Отдельно исследованы выпуклые и простые игры, доказано существование C-ядра. Теоретические результаты иллюстрируются примерами из социально–экономической сферы.

В четвертой главе исследуются позиционные многошаговые игры (игры в развернутой форме). Эта глава имеет особое значение, поскольку она служит базой для понимания следующих глав, в которых описываются дифференциальные игры. Наиболее изученным классом игр являются игры с полной информацией. Для них доказывается существование абсолютного равновесия по Нэшу, т. е. такого равновесия, сужение которого в каждой подыгре, является равновесием в этой подыгре. Однако, кроме абсолютных равновесий, существует достаточно представительный класс равновесий в стратегиях наказания. Приводится характеристика этого класса равновесий и приводятся теоремы, характеризующие этот класс равновесий. Особенностью равновесий по Нэшу является их неединственность и неэквивалентность в том смысле, что выигрыши игроков в разных ситуациях равновесия могут серьезно различаться. Поэтому нетривиальным вопросом является выбор конкретного равновесия по Нэшу. В главе предлагается в качестве представителя равновесий по Нэшу выбрать индифферентное равновесие, существование и единственность которого доказывается. Особое место занимают иерархические игры. В главе приводится решение иерархических игр с древовидной и ромбовидной структурой. Отдельно исследованы кооперативные позиционные игры. Здесь возникает новая проблема — построение динамически устойчивых (состоятельных во времени) принципов оптимальности. Эта проблема решается с помощью введения процедур распределения дележа и основанной на них регуляризации игры. Отдельный параграф посвящен построению принципов оптимальности в играх с переменным коалиционным разбиением.

В пятой главе рассматриваются антагонистические дифференциальные игры. Изложение материала ведется на примере дифференциальных игр преследования. Однако полученные результаты могут быть легко использованы и в более общем случае. Доказывается основополагающая теорема о существовании ситуации ε-равновесия в классе кусочно–программных стратегий, выводится уравнение Айзекса–Беллмана для функции значения игры, приводятся итеративные методы решения этого уравнения. Результаты теории иллюстрируются на модельных примерах простого преследования и преследования при наличии сил трения. В указанных случаях находится решение уравнение Айзексаа–Беллмана в явной форме. Исследуется задача преследования на быстродействие, и приводятся теоремы, указывающие на связь между задачами преследования на быстродействие и с предписанной продолжительностью. Отдельный параграф посвящен задаче преследования с задержкой информации у преследователя специального вида. Обоснован вид оптимальной стратегии убегающего, которая в этом случае включает в себя случайный выбор управляющего воздействия.

Здесь следует заметить, что уровень строгости решений дифференциальных игр и, в частности, игр преследования, базирующихся на решении уравнения Айзекса–Беллмана, ограничивается областью фазовых переменных, для которых указанное уравнение имеет смысл. Строгое обоснование решений может быть получено с использованием фундаментальных результатов Н. Н. Красовского и его учеников. Именно на основе формализации дифференциальной игры, предложенной Н. Н. Красовским, оказывается возможным связать дескриптивную теорему о значении игры и ситуации равновесия с обобщенным минимаксным решением уравнения Айзекса–Беллмана (см. [Красовский, Котельникова, 2010]). Это же замечание относится и к неантагонистическим дифференциальным играм, рассмотренным в следующей главе, для которых подобные результаты еще не получены, но их получение является лишь делом времени.

Неантагонистическим некооперативным дифференциальным играм посвящена шестая глава. В некооперативном случае в качестве принципа оптимальности берется равновесие по Нэшу в позиционных стратегиях. Для определения абсолютных равновесий в регулярном случае обосновывается техника использования систем дифференциальных уравнений в частных производных Гамильтона–Якоби–Беллмана. И хотя эта техника трудно применима для решения сложных задач, в ряде конкретных случаев удается найти явное решение. Это касается, прежде всего, приведенных в главе задач управления совместным предприятием, ограничения вредных выбросов в атмосферу и совместной добычи ограниченного природного ресурса. Во всех указанных задачах равновесия находятся в явной форме.

В седьмой и восьмой главах рассматриваются дифференциальные кооперативные игры. При формировании кооперативного соглашения используется принцип оптимальности классической кооперативной теории. Однако в динамике, так же как и в дискретных игровых задачах, здесь имеет место нарушение динамической устойчивости (состоятельности во времени) основных принципов оптимальности. Поэтому проводится регуляризация игры путем введения нового управляющего воздействия — процедуры распределения дележа, что обеспечивает динамическую устойчивость принципа оптимальности. Кооперативное решение находится для прикладных задач, рассмотренных также в некооперативном случае.

В учебнике принята тройная нумерация подразделов (пунктов) и формул: номер главы, номер параграфа, номер подраздела. Для рисунков и таблиц в рамках главы используется сквозная (двойная) нумерация. Основным структурным элементом учебника является подраздел (пункт), на который и делаются ссылки в тексте. Например, пример 1 п. 2.1.3 или теорема п. 4.2.5.

Глава 1

Матричные игры

§ 1.1. Определение антагонистической игры в нормальной форме

1.1.1. Начнем изучение теории игр с простейшей статической модели — матричной игры, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого из игроков конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Определение. *Система*

$$\Gamma = (X, Y, K), \tag{1.1.1}$$

где X и Y — непустые множества, и функция $K : X \times Y \to R^1$, называется антагонистической игрой в нормальной форме.

Элементы $x \in X$ и $y \in Y$ называются *стратегиями* игроков 1 и 2 соответственно в игре Γ, элементы декартового произведения $X \times Y$ (т. е. пары стратегий (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$) — *ситуациями*, а функция K — функцией выигрыша игрока 1. Выигрыш игрока 2 в ситуации (x, y) полагается равным $[-K(x, y)]$; поэтому функция K также называется *функцией выигрыша* самой игры Γ, а игра Γ — *игрой с нулевой суммой.* Таким образом, используя принятую терминологию, для задания игры Γ необходимо определить множества стратегий X, Y игроков 1 и 2, а также функцию выигрыша K, заданную на множестве всех ситуаций $X \times Y$.

Игра Γ интерпретируется следующим образом . Игроки одновременно и независимо выбирают стратегии $x \in X, y \in Y$. После этого игрок 1 получает выигрыш, равный $K(x, y)$, а игрок 2 — $(-K(x, y))$.

1.1.2. Определение. *Игра $\Gamma' = (X', Y', K')$ называется подыгрой игры $\Gamma = (X, Y, K)$, где $X' \subset X, Y' \subset Y$, а функция $K' : X' \times Y' \to R^1$ является сужением функции K на $X' \times Y'$.*

В данной главе будут рассматриваться главным образом антагонистические игры, в которых множества стратегий игроков конечны.

Определение. *Антагонистические игры, в которых оба игрока имеют конечные множества стратегий, называются матричными.*

Пусть игрок 1 в матричной игре (1.1.1) имеет всего m стратегий. Упорядочим множество X стратегий первого игрока, т. е. установим взаимно однозначное соответствие между множествами $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ и X. Аналогично, если игрок 2 имеет n стратегий, то можно установить взаимно однозначное соответствие между множествами $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и Y. Тогда игра Γ полностью определяется заданием матрицы $A = \{a_{ij}\}$, где $a_{ij} = K(x_i, y_i),\ (i, j) \in M \times N,\ (x_i, y_j) \in X \times Y, i \in M, j \in N$ (отсюда и название игры — матричная). При этом игра Γ реализуется следующим образом. Игрок 1 выбирает строку $i \in M$, а игрок 2 (одновременно с игроком 1 и независимо от него) выбирает столбец $j \in N$. После этого игрок 1 получает выигрыш (a_{ij}), а игрок 2 получает $(-a_{ij})$. Если выигрыш равен отрицательному числу, то речь идет о фактическом проигрыше игрока.

Игру Γ с матрицей выигрышей A обозначим Γ_A и назовем $(m \times n)$-игрой согласно размерности матрицы A. Если из изложения понятно, об игре с какой матрицей идет речь, то индекс A будем опускать.

Нумерация стратегий в матричной игре может производиться различными способами, поэтому каждому отношению порядка, строго говоря, соответствует своя матрица. Таким образом, конечная антагонистическая игра может быть описана различными матрицами, отличающимися друг от друга лишь порядком строк и столбцов.

1.1.3. *Пример 1 (Оборона города).* Этот пример известен в литературе под названием «игра полковника Блотто» [Дрешер, 1964]. Полковник Блотто имеет m полков, а его противник —– n полков. Противник защищает две позиции. Позиция будет занята полковником Блотто, если на ней наступающие полки окажутся в численном превосходстве. Противоборствующим сторонам требуется распределить полки между двумя позициями.

Определим выигрыш полковника Блотто (игрока 1) на каждой позиции. Если у него на позиции полков больше, чем у противника (игрока 2), то его выигрыш на этой позиции равен числу полков противника плюс один (занятие позиции равносильно захвату одного полка). Если у игрока 2 полков на позиции больше, чем у игрока 1, то игрок 1 теряет все свои полки на этой позиции и еще единицу (за потерю позиции). Если обе стороны имеют одинаковое число полков на позиции, то имеет место ничья и каждая из сторон ничего не получит. Общий выигрыш игрока 1 равен сумме выигрышей на обеих позициях.

Игра, очевидно, антагонистическая. Опишем стратегии игроков. Пусть, для определенности, $m > n$. Игрок 1 имеет следующие стратегии: $x_0 = (m, 0)$ – послать все полки на первую позицию; $x_1 = (m - 1, 1)$ – послать $(m - 1)$ полков на первую позицию, а один – на вторую; $x_2 = (m - 2, 2), \ldots, x_{m-1} = (1, m - 1), x_m = (0, m)$. Противник (игрок 2) имеет следующие стратегии: $y_0 = (n, 0),\ y_1 = (n - 1, 1), \ldots, y_n = (0, n)$.

Пусть игрок 1 выбрал стратегию x_0, а игрок 2 — стратегию y_0. Вычислим выигрыш a_{00} игрока 1 в этой ситуации. Поскольку $m > n$, на первой позиции выигрывает игрок 1. Его выигрыш равен $n + 1$ Следовательно, $a_{00} = n + 1$.

Теперь вычислим a_{01}. Поскольку $m > n - 1$, то на первой позиции выигрыш игрока 1 равен $n - 1 + 1 = n$. На второй позиции выигрывает игрок 2. Следовательно, проигрыш игрока 1 на этой позиции равен единице. Таким образом, $a_{01} = n - 1$. Рассуждая аналогично, получаем $a_{0j} = n - j + 1 - 1 = n - j,\ 1 \leq j \leq n$. Далее, если $m - 1 > n$, то $a_{10} = n + 1 + 1 = n + 2,\ a_{11} = n - 1 + 1 = n,\ a_{1j} = n - j + 1 - 1 - 1 = n - j - 1,\ 2 \leq j \leq n$.

В общем случае (для любых m и n) элементы a_{ij}, $i = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,n}$, матрицы выигрышей вычисляются следующим образом:

$$a_{ij} = K(x_i, y_j) = \begin{cases} n+2, & \text{если} \quad m-i > n-j, \quad i > j, \\ n-j+1, & \text{если} \quad m-i > n-j, \quad i = j, \\ n-j-i, & \text{если} \quad m-i > n-j, \quad i < j, \\ -m+i+j, & \text{если} \quad m-i < n-j, \quad i > j, \\ j+1, & \text{если} \quad m-i = n-j, \quad i > j, \\ -m-2, & \text{если} \quad m-i < n-j, \quad i < j, \\ -i-1, & \text{если} \quad m-i = n-j, \quad i < j, \\ -m+i-1, & \text{если} \quad m-i < n-j, \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad m-i = n-j, \quad i = j. \end{cases}$$

Таким образом, при $m = 4, n = 3$, рассмотрев всевозможные ситуации, получим матрицу выигрышей A этой игры:

$$A = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Пример 2 (Игра на уклонение) [Гейл, 1960]. Игроки 1 и 2 выбирают целые числа i и j из множества $\{1, \ldots, n\}$, при этом игрок 1 выигрывает величину $|i - j|$. Игра антагонистическая. Матрица выигрышей этой игры квадратная, размера $(n \times n)$, где $a_{ij} = |i - j|$. Так, если $n = 4$, матрица A игры принимает вид

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Пример 3 (Дискретная игра типа дуэли) [Гейл, 1960]. Игроки продвигаются навстречу друг другу на n шагов. После каждого сделанного шага игрок может выстрелить или нет, но во время игры он может выстрелить только один раз. Считается, что вероятность того, что игрок попадает в своего противника, если выстрелит, продвинувшись на k шагов, равна k/n $(k \leq n)$.

Стратегия игрока 1(2) заключается в принятии решения стрелять на i-м (j-м) шаге. Пусть $i < j$ и игрок 1 принимает решение стрелять на i-м шаге, а игрок 2 — на j-м шаге. Тогда выигрыш a_{ij} игрока 1 определяется формулой

$$a_{ij} = \frac{i}{n} - \left(1 - \frac{i}{n}\right)\frac{j}{n} = \frac{n(i-j) + ij}{n^2}.$$

Таким образом, выигрыш a_{ij} — это разность вероятностей поражения противника и собственной гибели в дуэли.